Leçon 1 – Reconnaître une situation de proportionnalité

Introduction

Chez les marchands A et B, on a affiché le prix des œufs « bio extra » dans un tableau :

Marchand A

Nombres d'œufs	6	12	36
Prix en €	3	6	18

Marchand B

Nombres d'œufs	6	12	36
Prix en €	3	6	15

Marchand A :

On observe que si on multiplie le nombre d'œufs par 2 (ou 3), le prix est aussi multiplié par 2 (ou 3).

× 2 × 3

Nombres d'œufs	6	12	36
Prix en €	3	6	18

× 2 × 3

On dit que le tableau ci-dessus est un tableau proportionnel ou un tableau de proportionnalité.

Le nombre d'œufs achetés et le prix sont des grandeurs proportionnelles.

Marchand B :

On observe que si on multiplie le nombre d'œufs par 2, le prix est aussi multiplié par 2 mais lorsqu'on multiplie par 3, le prix n'est pas multiplié par 3.

× 2 × 3

Nombres d'œufs	6	12	36
Prix en €	3	6	15

× 2 × 2,5

On dit que le tableau ci-dessus est un tableau non proportionnel ou n'est pas un tableau de proportionnalité.

Le nombre d'œufs achetés et le prix ne sont pas des grandeurs proportionnelles.

Coefficient de proportionnalité

On reprend le tableau de proportionnalité associé au marchand A.

On constate que 6 ÷ 3 = 12 ÷ 6 = 36 ÷ 18 = 2 (de même, 3 ÷ 6 = 6 ÷ 12 = 18 ÷ 36 = 0,5).

× 2

Nombres d'œufs	6	12	36
Prix en €	3	6	18

× 0,5

Les nombres 2 et 0,5 sont appelés les coefficients de proportionnalité associé au tableau ci-dessus.

<u>Remarque</u> : Pour compléter un tableau de proportionnalité, on pourra donc utiliser soit les coefficients multiplicateurs reliant les colonnes du tableau, soit les coefficients de proportionnalité reliant les 2 lignes du tableau.

Reconnaître une situation de proportionnalité

Définition : Un tableau est dit « proportionnel » ou « de proportionnalité » lorsqu'on obtient chaque nombre d'une ligne en multipliant le nombre correspondant de l'autre ligne par un même nombre, appelé **Coefficient de proportionnalité**.

Méthode : Pour reconnaître un tableau de proportionnalité, on peut effectuer chacun des quotients d'un nombre de la seconde ligne du tableau par le nombre correspondant de la première ligne.
Si tous ces quotients sont égaux, le tableau est un tableau de proportionnalité ;
sinon, il ne l'est pas.

Remarques : Dans un tableau de proportionnalité :

- la situation représentée est une situation de proportionnalité ;
- les nombres de la seconde ligne sont proportionnels à ceux de la première ligne ;
- le quotient commun est appelé coefficient de proportionnalité.

Exemple 1 : Dans une boulangerie, des macarons sont vendus :

- par boîte de 6 macarons pour 8,40€ ;
- par boîte de 10 macarons pour 14€ ;
- par boîte de 15 macarons pour 21€ ;

Le prix des macarons est-il proportionnel au nombre de macarons ?

Réponse : Regroupons ces données dans un tableau.

Nombre de macarons	6	10	15
Prix (en €)	8,40	14	21

× 1,4

Le nombre qui multiplié par 6 donne 8,4 est $\frac{8,4}{6}$; Le nombre qui multiplié par 10 donne 14 est $\frac{14}{10}$

Le nombre qui multiplié par 15 donne 21 est $\frac{21}{15}$.

$$\frac{8,4}{6}=1,4\,;\quad \frac{14}{10}=1,4\,;\quad \frac{21}{15}=1,4$$

Tous les quotients sont égaux à 1,4. (Cela signifie que 1 macaron coûte 1,4€)
Donc ce tableau est un tableau de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité est 1,4.
Le prix des macarons est donc proportionnel au nombre de macarons.
(Il n'y a pas une offre qui est plus rentable qu'une autre).

Exemple 2 : Une enseigne de location de voiture loue une voiture selon les forfait suivants :

- 50 € pour 2 heures ;
- 125 € pour 5 heures ;
- 360 € pour 24 heures

Le prix de la location est-il proportionnel à la durée de la location de la voiture ?

Réponse : Regroupons ces données dans un tableau.

Durée de la location (en h)	2	5	24
Prix (en €)	50	125	360

$$\frac{50}{2}=25\,;\quad \frac{125}{5}=25\,;\quad \frac{360}{24}=15$$

Tous les quotients ne sont pas égaux $\left(\frac{50}{2}\neq\frac{360}{24}\right)$. Donc ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

Le coût de la location n'est donc pas proportionnel à la durée de location du véhicule.

D'autres exemples :

- La taille d'une personne n'est pas proportionnelle à son âge : en effet si un enfant mesure 1,42 m à 12 ans, il ne mesurera pas 2,84 m à 24 ans.
- Si une personne roule à vitesse constante, la distance parcourue sera proportionnelle à la durée du parcours : en effet si on roule à 130 km/h, en une heure on parcourra 130 km, si on triple la durée (3 h), on triplera la distance parcourue (3 × 130 = 390 km).
- Pour utiliser une recette la quantité d'ingrédients nécessaire est proportionnelle au nombre de personnes. Par exemple :

  Recette du fondant au chocolat

  Temps de préparation : 10 minutes

  Temps de cuisson : 30 minutes

  Ingrédients (pour 6 personnes) :

  - 200 g de chocolat à pâtisser noir
  - 100 g de beurre
  - 3 oeufs
  - 50 g de farine
  - 100 g de sucre en poudre

  Si on veut faire un gâteau pour 12 personnes, il faudra doubler les quantités d'ingrédients.
- Des melons sont vendus 2,90 € l'unité. Donc le prix des melons est proportionnel au nombre de melons achetés : si on achète 3 melons, on paiera 3 × 2,90 = 8,70 €.

  En revanche, le prix des melons n'est pas proportionnel à leur poids : si on achète un melon de 250 g, il coûtera 2,90 €, si on achète un melon 2 fois plus lourd, il ne coûtera pas 2 fois cher, il coûtera aussi 2,90 €.

Nous avons donc en notre possesion deux méthodes faciles à appliquer pour juger de la proportionnalité ou non d'une situation, appliquons ces deux méthodes à travers les exemples de l'activité n°1 :

Première méthode

Dans une situation où on a deux grandeurs dépendant l'une de l'autre, on dit que ces deux grandeurs sont proportionnelles **si** :

> Lorsqu'on multiplie une grandeur par un nombre, l'autre grandeur est multipliée **par le même nombre**.

Exemple 1 : Rapport entre le volume de Coca-Cola et son apport en calories.

Volume (cL)	25	75	150
calories	100	300	600

Le nombre de calories apportées est proportionnel au volume de Coca-Cola bu car lorsque l'on mutliplie le volume de Coca-Cola par un nombre, la quantité de calories est multiplié par le même nombre.

En effet : 25 **x 3** = 75 et 100 **x 3** = 300 (on multiplie par **3**)

75 **x 2** = 150 et 300 **x 2** = 600 (on multiplie par **2**)

Exemple 2 : Rapport entre la durée d'écoulement d'un robinet et la quantité d'eau écoulée.

Durée (h)	4	8	2	10
Volume (L)	6	12	3	15

Le volume d'eau écoulé est proportionnel à la durée d'écoulement du robinet car lorsque l'on mutliplie le volume d'eau écoulé par un nombre, la durée d'écoulement du robinet est multiplié par le même nombre.

En effet : 4 **x 2** = 8 et 6 **x 2** = 12 (on multiplie par **2**)

2 **x 4** = 8 et 3 **x 4** = 12 (on multiplie par **4**)

2 **x 5** = 10 et 3 **x 5** = 15 (on multiplie par **5**)

Exemple 3 : Rapport entre la longueur du côté d'un carré et son aire.

Côté (cm)	5	10	15
Aire (cm^2)	25	100	225

L'aire d'un carré n'est pas proportionnel à la longueur de son côté car lorsque l'on mutliplie la longueur du côté par un nombre, l'aire du carré n'est pas multiplié par le même nombre.

En effet :

5 **x 2** = 10 et 25 **x 4** = 100 (quand on multiplie la longueur par **2**, on multiplie l'aire par **4**)

10 **x 1,5** = 15 et 100 **x 2,25** = 225 (quand on multiplie la longueur par **1,5**, on multiplie l'aire par **2,25**)

Deuxième méthode

Dans une situation où on a deux grandeurs dépendant l'une de l'autre, on dit que ces deux grandeurs sont proportionnelles **si** :

> Une grandeur s'obtient à partir de l'autre **en multipliant toujours par un même nombre**. Ce nombre est un coefficient de proportionnalité.

Exemple 4 : Rapport entre des places de cinéma et leur prix

Voici combien ont payé des groupes de 5 personnes, 7 personnes et 15 personnes pour une séance de cinéma :

Nombre de places	5	7	15
Prix	23,50	32,90	70,50

× **4,7**

Le prix des séances de cinéma est proportionnelle au nombre de places car le prix des séances s'obtient toujours en mutlipliant le nombre de place par le même nombre 4,7 (c'est un coefficient de proportionnalité, ici le prix d'une place de cinéma).

En effet : 23,50 ÷ 5 = **4,7** 23,90 ÷ 7 = **4,7** et 70,50 ÷ 15 = **4,7**

Et donc : 5 x **4,7** = 23,50 7 x **4,7** = 32,90 et 15 x **4,7** = 70,50

Exemple 5 : Rapport entre le prix et la masse des tomates

Masse de tomates (kg)	3	9	12
Prix (€)	6	18	24

× **2**

Le prix des tomates est proportionnelle à leur masse car le prix des tomates s'obtient toujours en mutlipliant leur masse par le même nombre : **2** (c'est un coefficient de proportionnalité, ici le prix d'un kilogramme de tomates est de 2 euros).

En effet : 3 x **2** = 6 9 x **2** = 18 et 12 x **2** = 24

Exemple 6 : Rapport entre l'âge d'un enfant et et celui de son père

Âge de Rafael	12	24	30
Âge de son père	45	57	63

On a que : 45 ÷ 12 = **3,75** 57 ÷ 24 = **2,375** et 63 ÷ 30 = **2,1**

Et donc : 12 x **3,75** = 45 24 x **2,375** = 57 et 30 x **2,1** = 63

L'âge de Rafael n'est donc pas proportionnel à l'âge de son père car l'âge de Rafael ne s'obtient pas en multipliant l'âge de son père par le même nombre à chaque fois (par 3,75 puis par 2,375 etc...)

Pour voir si tu as bien compris, tu peux regarder les 2 vidéos ci-jointes :
Soit en scannant les QRcodes suivants avec ton smartphone :

Soit en cliquant sur les vidéos 1 et 2 de la page de travail.